

DESEMPENHO ALGÉBRICO EM QUESTÕES DO SIMAVE: ESTUDO DE UM CASO

Paulo César Oliveira – UFSCar (paulooliveira@ufscar.br)

**Ronan César Duarte – Escola Estadual Américo de Paiva
(ronancduarte@hotmail.com)**

Resumo: Esta comunicação científica embasada na dissertação de mestrado do segundo autor; fornece um relato de pesquisa que buscou responder a seguinte questão de investigação: como alunos em contexto de bom rendimento no SIMAVE mobilizaram e coordenaram registros de representação semiótica em questões com conteúdos algébricos? Os pressupostos teóricos levaram em conta a teoria cognitiva de Raymond Duval e a abordagem metodológica para esta pesquisa foi qualitativa, na modalidade de estudo de caso. O instrumento utilizado para a produção de informações foi um teste com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, composto de oito questões com quatro alternativas cada um. Nas resoluções, pedimos a justificativa do raciocínio como forma de acesso à produção escrita de nossos alunos. Em termos de análise dos dados, o desempenho quantitativo dos alunos revelou que eles utilizaram os saberes adquiridos ao longo do Ensino Fundamental II para se desenvolverem como estrategistas eficazes na obtenção da alternativa correta. No desempenho qualitativo, a forma como os registros de representação semiótica foram mobilizados e coordenados, esteve diretamente ligado ao papel exercido por esse professor-pesquisador em sala de aula, ou seja, o registro escrito como forma de expressar o raciocínio, foi tratado no decorrer das aulas como parte fundamental do desenvolvimento das atividades matemáticas dos alunos. Um dos resultados de pesquisa apontou que os registros escritos de nossos alunos são insuficientes quando há necessidade de recorrer aos conceitos pertinentes à interpretação de elementos visuais do gráfico como a inclinação da reta no plano cartesiano; para se obter a equação da reta, por exemplo.

Palavras-chave: Álgebra, registros de representação semiótica, avaliação externa.

Introdução

O conteúdo deste artigo contém reflexões sobre o processo de investigação desenvolvido pelo segundo autor, sob a orientação do primeiro. O estudo levou em conta um histórico de bons resultados, desde 2009, obtidos por alunos do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio na avaliação externa aplicada pelo órgão competente do estado de Minas Gerais.

Sistema Mineiro de Avaliação (SIMAVE): um dos pilares do projeto educacional do Estado.

O SIMAVE é um modelo de avaliação em larga escala, pautado na aplicação de testes de proficiência com itens de múltipla escolha que, entre outros objetivos, visa

avaliar habilidades e competências do aluno de 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e aluno concluinte do Ensino Médio, nas disciplinas de língua portuguesa e matemática.

A Matriz de Referência para esse modelo de avaliação (MINAS GERAIS, 2009) é composta por um conjunto de descritores, os quais explicitam dois pontos básicos do que se pretende avaliar: o conteúdo programático a ser avaliado em cada período de escolarização e o nível de operação mental necessário para a realização de determinadas tarefas.

No tema “Números e operações – álgebra e funções” destacamos a competência utilizar procedimentos algébricos, dado o fato de que “o estudo da álgebra possibilita aos alunos desenvolver, entre outras capacidades, a de generalizar” (MINAS GERAIS, 2013, p.32)

Vale ressaltar que nessa Matriz de Referência (MINAS GERAIS, 2009, p.51) “as atividades devem abordar a resolução de situações-problemas”. Conforme a Proposta Curricular (MINAS GERAIS, 2005, p.16), entende-se situação-problema como “problemas que envolvem o processo de tradução do enunciado, seja contextualizado ou não, em linguagem matemática, e a tomada de decisão sobre quais ferramentas matemáticas serão usadas em sua resolução (‘modelagem’)

A Matriz de Referência toma por base o currículo oficial e apresenta os conhecimentos definidos para serem avaliados. Como o Estado de Minas Gerais elaborou seu próprio documento curricular pautado nos pressupostos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), recorremos ao referido currículo estadual para apresentar as estratégias de ensino previstas para os conteúdos algébricos, tendo em vista que “é essencial que se conheça não apenas o que se ensina, mas para quem se ensina” (MINAS GERAIS, 2005, p.13).

O ensino de álgebra na Proposta Curricular de Minas Gerais

As orientações pedagógicas dessa Proposta Curricular são permeadas pelos seguintes objetivos: reconhecer situações que podem ser descritas em linguagem matemática, ser capaz de aplicar métodos matemáticos (operações, equações, diagramas, fatos da geometria) para resolvê-las, estabelecer conexões internas à matemática envolvendo seus vários temas bem como a interdisciplinaridade com outras áreas curriculares. Em particular, para os anos finais do Ensino Fundamental, “é adequado e desejável introduzir de modo gradativo o método lógico dedutivo,

apresentando e requerendo do aluno demonstrações simples em álgebra e geometria” (MINAS GERAIS, 2005, p.15).

Um objetivo deste documento curricular, interpretado por nós como capital, é desenvolver em qualquer nível, habilidades para a solução de problemas.

Esses problemas podem advir de situações concretas observáveis (“contextualizadas”) ou não. No primeiro caso, é necessária uma boa capacidade de usar a linguagem matemática para interpretar questões formuladas verbalmente. Por outro lado, problemas interessantes, que despertam a curiosidade dos estudantes, podem surgir dentro do próprio contexto matemático quando novas situações podem ser exploradas e o conhecimento aprofundado, num exercício contínuo da imaginação.

Nessa Proposta Curricular há o pressuposto de que a resolução de uma diversidade de problemas desenvolve tanto a capacidade quanto a habilidade de atribuir significado aos conceitos abstratos apreendidos.

No caso do eixo temático Álgebra há dois temas: expressões algébricas e equações algébricas. No caso do primeiro tema, os tópicos são: linguagem algébrica, valor numérico e operações com expressões algébricas. Para o tema equações algébricas, os tópicos são equações de 1º e 2º graus, sistemas de duas equações de 1º grau e operações com polinômios.

Os registros de representação semiótica e a álgebra.

Raymond Duval (2009) afirma que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. Do contexto geral de semiótica, o signo é relacionado a um objeto concreto, para a especificidade matemática, o símbolo (signo) representa o objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito).

A palavra abstrato diz respeito ao fato de que o objeto matemático não é perceptível, mas seu acesso se dá por meio de registros de representação semiótica. Com efeito, outro argumento se constrói, desta vez em relação ao binômio objeto-representação: “não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009, p14). Há uma ênfase para a necessidade de não confundir os objetos matemáticos com suas representações, pois diversas representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático. Se considerarmos o objeto matemático sistemas de equações lineares, podemos representá-

lo na forma algébrica, gráfica, entre outras formas de registros de representação semiótica.

A teoria dos registros de representação desenvolvida por Raymond Duval estabelece que, para um indivíduo desenvolver o funcionamento do seu pensamento na aquisição de um conhecimento matemático é necessário tanto diferenciar uma noção científica dos registros semióticos que a representam, quanto conhecer a funcionalidade desses registros. Neste contexto, ocorre no funcionamento cognitivo do pensamento humano, aquisições funcionais relativas tanto aos sistemas orgânicos, disponíveis desde o nascimento, como a audição, a visão, o tato e a memória; quanto aos sistemas semióticos, usados para se comunicar e também para organizar e tratar as informações.

Com isso, numa atividade de aquisição de conhecimento matemático, tem que ser levados em conta dois componentes: os próprios conteúdos desse conhecimento, nos quais existem métodos e processos para descobrir e estabelecer resultados e, o cognitivo, que segundo Duval (2009), a identificação de uma noção matemática com seus registros de representação semióticos pode constituir-se num dos problemas centrais da aprendizagem dessa noção. Um registro de representação semiótico de um objeto matemático pode ser um símbolo, uma figura ou a língua natural. Cada tipo de registro apresenta um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ele foi produzido. A apreensão das características diferentes só terá sucesso quando o indivíduo que aprende for capaz de efetuar transformações nos registros, seja na forma de tratamento (operações internas a um mesmo registro) e/ou conversões (passagem de um registro a outro, com mudança na forma pela qual determinado registro é representado).

A atividade de conversão é menos imediata e simples do que se tende a crer. Essa atividade não se encerra, por exemplo, no fato de determinar uma equação a partir do seu gráfico. É fundamental analisar como se pode efetuar o procedimento de correspondência associativa das unidades significantes de entrada e saída, que rege toda conversão de representação.

Quando a conversão de registros é quase imediata temos o fenômeno de congruência. Para este caso, Duval (2009) destacou que a conversão no sentido da escrita algébrica para o gráfico, parece não apresentar dificuldades específicas. Quando mudamos o sentido de conversão, a situação é diferente e caracteriza um fenômeno de não-congruência. Na teoria dos registros de representação semiótica, associamos o

fenômeno de congruência com o custo cognitivo empregado na atividade de conversão dos registros.

Para que o aluno faça uma leitura correta dos gráficos matemáticos é necessário que ele seja capaz de discriminar que as unidades significantes do gráfico correspondem aos valores de diferentes variáveis visuais, por exemplo, o valor positivo do coeficiente angular determina uma reta com ângulo menor que 90 graus em relação ao eixo x, no sentido anti-horário.

Toda atividade de conversão pressupõe a discriminação das unidades significantes a serem postas em correspondência tanto nos registros de partida quanto nos de saída. No caso da representação de gráficos cartesianos de reta, suas unidades significantes são determinadas por oito valores qualitativos (esboço de oito diferentes gráficos) correspondendo à associação de três variáveis visuais: o sentido de inclinação da reta, a sua posição de intersecção com o eixo das ordenadas ou sua posição no que concerne a uma divisão simétrica de dois quadrantes opostos. Para obter cada um dos esboços gráficos é necessário a variação de uma variável, mantendo constante os valores das demais. (Duval, 2009).

Opção metodológica

O desenvolvimento do percurso metodológico dessa pesquisa deu-se na perspectiva qualitativa, na modalidade de estudo de caso. Nosso estudo é singular pelo fato de avaliarmos a mobilização de registros de representação semiótica em questões com conteúdos algébricos, por parte de alunos cuja unidade escolar tem apresentado bom rendimento no SIMAVE. Em matéria publicada na revista Veja em maio de 2012, com o título "Quem quer consegue", encontramos um ranking feito pela ONG Todos Pela Educação que destacou 10 municípios brasileiros que tem assegurado as bases para uma educação de qualidade. Dentre estes municípios, sete são de Minas Gerais e Monte Santo de Minas ocupou a 4º colocação.

Segundo Lüdke e André (1986), o estudo de caso é o estudo de um caso, o qual é bem delimitado, com contornos claramente definidos e se destaca por constituir uma unidade dentro de um sistema mais amplo. Outro fator que agrega à singularidade é o fato deste pesquisador ter sido o professor dos alunos participantes desta pesquisa durante o Ensino Fundamental II.

A escola estadual Américo de Paiva, localizada no município Monte Santo de Minas, adota desde 2005, metade da carga horária extra-classe, composta de quatro horas semanais que o professor deve cumprir, para treinamento com os alunos sobre o SIMAVE. No caso da matemática são aplicados itens do banco de dados do SIMAVE e a função do professor é apenas mediar as resoluções e posteriormente orientar um debate sobre os procedimentos utilizados. Várias resoluções criativas surgem nesses encontros; e um dos pontos positivos dessa dinâmica foi o aumento na participação das aulas de matemática e conseqüentemente nos resultados das avaliações bimestrais.

Além do treinamento, a equipe pedagógica dessa escola elabora mensalmente um simulado das disciplinas de matemática e português para serem aplicados aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 3º série do Ensino Médio. O simulado é aplicado no horário das aulas das disciplinas citadas e posteriormente à aplicação, é feita a sua correção. Assim os alunos podem quantificar seu desempenho mensal através dos gabaritos, assim como verificar as resoluções dos itens que tiveram mais dificuldades.

Esse trabalho sistemático envolvendo equipe gestora, professores e alunos tem buscado compartilhar saberes e estratégias, melhorar o desempenho individual e do grupo e nesta perspectiva de ações coletivas, os resultados positivos obtidos nas avaliações externas se tornam conseqüências destas ações.

O trabalho de campo

Aplicamos para 25 alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental sob a responsabilidade do professor-pesquisador, oito questões extraídas do banco de questões do SIMAVE com os seguintes conteúdos: equação de 1º grau, resolução de sistema de duas equações do 1º grau com duas variáveis via solução algébrica e gráfica, termo geral em padrão de sequência numérica e formulação algébrica para o conceito de área.

Como as questões eram de múltipla escolha, solicitamos que os alunos apresentassem a resolução das suas atividades matemáticas, bem como uma justificativa sobre o raciocínio utilizado.

Para designarmos os resultados obtidos de modo a responder nossa questão de investigação, escolhemos apresentar a análise da 3ª e 8ª questão, por estarem condicionadas à análise do fenômeno de congruência, dada a conversão do registro algébrico para o gráfico e vice-versa. Segundo Duval (2009) há relação entre o fenômeno de congruência nas conversões e o sucesso dos estudantes na realização de

suas atividades matemáticas. Nessa relação, este autor evidencia a dificuldade da conversão de um registro de representação para outro quando a conversão é não-congruente; conseqüentemente, a taxa de desempenho dos alunos tende a ser baixa..

Análise dos protocolos escritos dos alunos

Na sequência dedicamos apresentar o enunciado das referidas questões, o conteúdo envolvido articulado ao descritor contido na Matriz de Avaliação do SIMAVE (MINAS GERAIS, 2009), a respectiva resolução esperada em confronto com o que foi produzido pelos alunos como solução.

Um sistema de equações de 1º grau foi dado por $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x - 2 \end{cases}$

Qual dos gráficos a seguir representa o sistema?

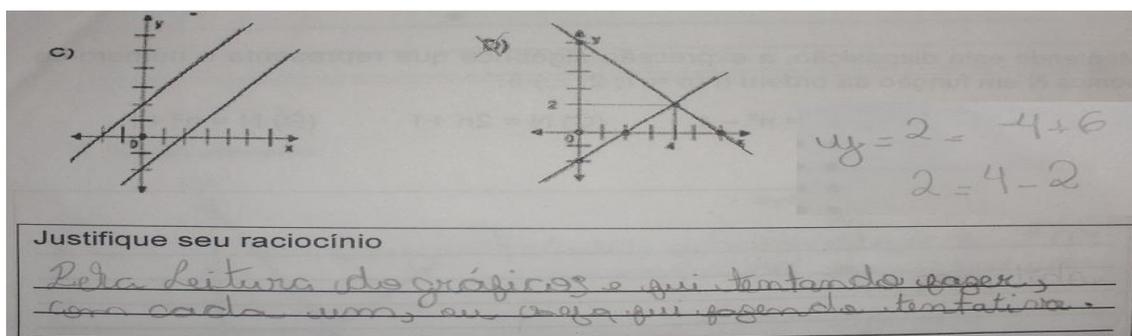
Esse enunciado relaciona-se à 3ª questão, cujo conteúdo envolveu um sistema de equações do 1º grau, no qual a busca pela alternativa correta relaciona a conversão do registro algébrico para o registro gráfico. A solução desta questão consiste em obter um único par ordenado (x, y) de modo possa ser interpretado como o cruzamento das duas retas.

Em termos de descritores, destacamos o D29 o qual espera-se que o aluno resolva situações-problema envolvendo sistemas de equação do 1º grau e o D30; que identifica a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do primeiro grau.

Quanto à mobilização e coordenação dos registros de representação semiótica, espera-se que o aluno seja capaz de resolver o sistema de equações, por substituição ou adição, e determinar seu registro gráfico.

Todos os alunos acertaram a resposta (letra D), com a maioria deles utilizando o processo de tentativas até encontrar a resposta correta. A seguir visualizamos a justificativa da aluna Débora:

Figura 1: Justificativa da aluna Débora (Item 3).

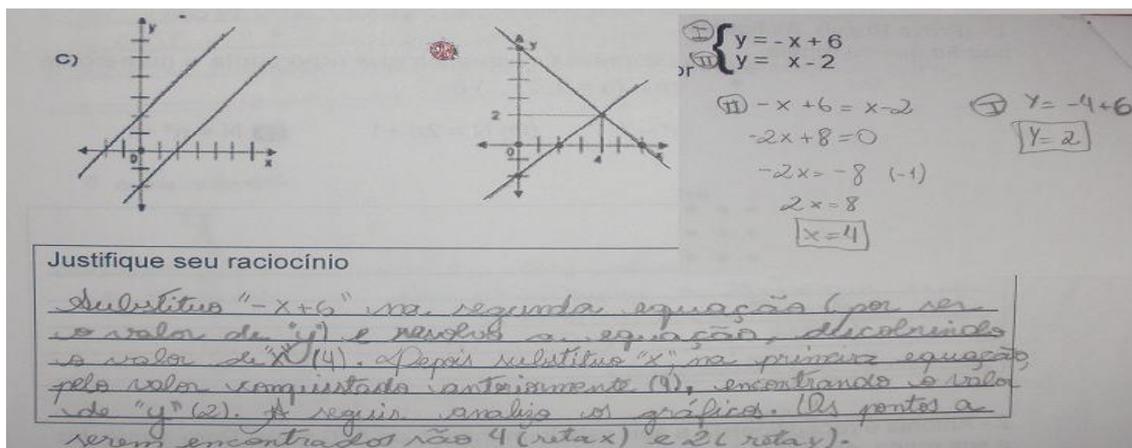


Fonte: arquivo do professor-pesquisador

Débora fez tentativas utilizando os pontos de interseção entre as retas, e em seus registros de substituição consta apenas o registro referente à tentativa na letra D.

Merece destaque a resolução da aluna Luma, que utilizou o método de substituição para localizar a representação gráfica do sistema, demonstrando o domínio das habilidades requeridas.

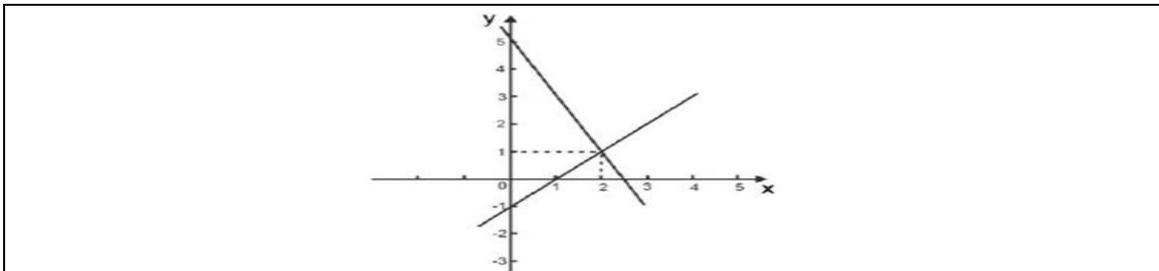
Figura 2: Resolução e justificativa da aluna Luma (Item 3)



Fonte: arquivo do professor-pesquisador

Luma utilizou o valor de y da primeira equação do sistema e substituiu na segunda, encontrando o valor de x . Substituindo esse valor na primeira equação, encontra y . A aluna demonstrou em seu procedimento o domínio algébrico necessário para resolver o sistema, o qual foi ratificado no registro escrito da aluna.

O enunciado a seguir diz respeito à 8ª questão, cujo descritor correspondente é o D30, o qual envolve a identificação da relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau:



O gráfico acima representa o sistema:

(A) $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

No que diz respeito aos registros de representação semiótica espera-se que o aluno converta o registro figural (gráfico cartesiano) utilizando o par ordenado (registro numérico) associado ao cruzamento das duas retas para o registro algébrico que é um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis.

Sete alunos assinalaram a alternativa D (incorreta). Na análise da atividade matemática destes alunos, não encontramos nenhum procedimento matemático que possa ter conduzido à alternativa. Nos relatos da justificativa de raciocínio o que prevaleceu foi a ‘observação’ entre o gráfico e os sistemas de equações. Mais especificamente, apresentamos o registro de Gisele: ‘observando o gráfico e as alternativas, a que deu certo foi a D’.

Dezoito alunos assinalaram corretamente a alternativa B. Destes, 14 estudantes substituíram o ponto de intersecção (2, 1) nas equações até encontrar o sistema correto. Os demais optaram pela resolução do sistema, como foi o caso de Letícia, cujo protocolo apresentamos a seguir:

Figura 3: Resolução e justificativa da aluna Letícia (item 8)

Justifique seu raciocínio

Resolvendo as equações se encontra o único que deu número positivo, e substitui na outra representação os pontos de intersecção no gráfico para a letra B.

d) $y = 2x - 5$
 $y = x - 1$
 $x - 1 = 2x - 5$
 $3x = 4$
 $x = \frac{4}{3}$

a) $y = x - 1$
 $y = -2x + 7$
 $x - 1 = -2x + 7$
 $3x = 8$
 $x = \frac{8}{3}$

b) $y = -2x + 5$
 $y = x - 1$
 $x - 1 = -2x + 5$
 $3x = 6$
 $x = 2$
 $y = 2 - 1$
 $y = 1$

c) $y = 2x - 5$
 $y = 2x - 7$
 $y = -2$
 $-2 = 2x - 7$
 $2x = 5$
 $x = \frac{5}{2}$

Fonte: arquivo do professor-pesquisador

Na resolução, ela utilizou o método de substituição para resolver o sistema. As letras A, C e D resultaram em valores fracionários e foram descartados pela aluna, já a alternativa B apresentou $x = 2$ e após a substituição em uma das equações resultou em $y = 1$, cujo par ordenado (2,1) é o ponto de intersecção entre as referidas retas, conduzindo à resposta (alternativa B).

A conversão do registro figural (gráfico) para o registro algébrico (sistema de equações) necessário para este item foi o caminho inverso daquele requerido na resolução do 'item 3'. Em termos de registros de representação semiótica temos duas situações com custos cognitivos diferenciados. Enquanto no item três ressaltamos que a correspondência entre o sistema de equações e o respectivo gráfico se faz ponto a ponto, quando pensamos no caminho inverso, a abordagem ponto a ponto não é somente inadequada como constitui um obstáculo, pois é necessário associar componentes visuais como, por exemplo, a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo x no sentido anti-horário, com o valor numérico do coeficiente angular. Portanto, nessa segunda situação temos um custo cognitivo mais alto na mobilização dos registros de representação semiótica.

Se pensarmos em comparar o desempenho de nossos participantes da pesquisa no que diz respeito ao item 3 e 8 temos os seguintes resultados: 21 alunos acertaram o item 3, enquanto, 14 acertaram o item 8. No entanto, destes quatorze estudantes, quatro optaram pela conversão entre o registro algébrico (sistema de equações) e o registro figural (gráfico); estratégia adotada na resolução do item 3.

Assim, quando levamos em conta os dois sentidos de mobilização dos registros de representação semiótica, observamos que no item 8, ocorreu um custo cognitivo maior; apenas 10 alunos acertaram contra 21 alunos que acertaram o item 3. Portanto, nossos resultados convergem com os aportes teóricos de Duval (2009) no que diz respeito ao fenômeno de congruência.

No momento que escolhemos os itens para a composição desse instrumento de pesquisa levamos em conta a diversidade de registros de representação semiótica pertinentes à atividade algébrica, ou seja, registro na língua natural (escrito), registro algébrico, registro numérico e registro figural (gráfico ou padrão geométrico de sequência numérica).

Observamos por meio da análise da justificativa do raciocínio dos nossos alunos que os mesmos mobilizaram estes registros semióticos esperados para o ensino-aprendizagem de álgebra, tomando por base a Matriz de Referência para Avaliação do SIMAVE e a Proposta Curricular de Matemática de Minas Gerais.

A forma como estes registros foram mobilizados está diretamente ligada ao papel exercido por esse professor-pesquisador em sala de aula, ou seja, o registro escrito como forma de expressar o raciocínio, é tratado em nossas aulas como parte fundamental do desenvolvimento das atividades matemáticas dos alunos. Combatemos em nossas ações docentes a cultura escolar de que escrever é uma atividade exclusiva das disciplinas da área de humanas.

A teoria dos registros de representação semiótica também atendeu nossos propósitos de pesquisa no quesito fenômeno de congruência. Quando escolhemos o item três e oito para compor nosso teste, levamos em conta o sentido e coordenação dos registros semióticos, ou seja, a transição do registro algébrico para o gráfico e vice-versa.

Nessas questões, os alunos mobilizaram os registros de representação semiótica considerando o ponto de intersecção entre as duas retas como condição necessária e suficiente na conversão do registro algébrico para o gráfico e, vice-versa. A cultura matemática difundida sobre a axiomática euclidiana presenteia-nos com uma definição que por um único ponto é possível traçarmos infinitas retas. Se tivéssemos excluído as alternativas, teríamos perdido a oportunidade de avaliar como ocorreu a referida mobilização de registros. Por outro lado, com as alternativas, a análise que fizemos frente às justificativas do raciocínio no item 8, permitiu-nos inferir que nossos alunos apresentaram fragilidades em articular os conceitos internos aos elementos visuais do gráfico como a inclinação da reta no plano cartesiano, por exemplo, como elemento necessário para a composição da equação da reta.

Fatos como o que acabamos de relatar; revelou cuidados que esse professor-pesquisador precisa se ater no processo de ensino-aprendizagem de conceitos algébricos. O cuidado que citamos diz respeito à necessidade de elaborarmos em sala de aula tarefas cuja articulação entre gráficos e suas respectivas equações não seja pautada na construção ponto a ponto. É necessário privilegiar aspectos visuais com a respectiva base conceitual requerida e vice-versa. Materiais como papel quadriculado, régua,

compasso, transferidor ou até mesmo um software livre como o geogebra ou régua e compasso podem contribuir na aprendizagem dos alunos.

Consideramos que o SIMAVE é um instrumento consolidado nas políticas de educação pública do Estado de Minas Gerais. Entre as finalidades deste sistema de avaliação, destaca-se o delineamento de orientações das ações dos docentes por meio da escala de proficiência. Ao indicar as competências já adquiridas pelos alunos e as habilidades que necessitam ser trabalhadas; o SIMAVE permite reflexões sobre como aperfeiçoar tanto o desempenho da escola, quanto a aquisição dos saberes individuais de nossos alunos. No entanto, quando pensamos na aprendizagem precisamos refletir que o status de bom aluno frente aos resultados deste sistema de avaliação é um indicativo de qualidade para a aprendizagem, porém, a apreensão em matemática é um processo contínuo.

No momento que finalizamos a formulação de nossa questão de investigação, a qual inicia-se com a palavra ‘como’, tínhamos como objetivo que o uso da teoria dos registros de representação semiótica não se limitasse às operações de conversão e tratamento, mas que propiciasse reflexões sobre nossas ações docentes, de modo a ajudar nossos alunos na aquisição de competências e habilidades matemáticas.

Referências bibliográficas:

- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.
- BORGES, Helena. **Quem quer consegue**. Disponível em: <<<http://planetasustentavel.abril.com.br/noticia/educacao/historia-municipios-educacao-aliar-medidas-simples-disciplina-685042.shtml?func=2>>>. Acesso em: 1 ago. 2016.
- LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.
- MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **SIMAVE/PROEB 2012: Revista Pedagógica de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental**. Secretaria de Estado de Educação, Minas Gerais, 2013.
- MINAS GERAIS. **Matrizes de Referência para Avaliação: Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública – SIMAVE Matemática**. Minas Gerais: CAEd-UFJF, 2009.
- MINAS GERAIS. **Proposta Curricular: Matemática – Ensinos Fundamental e Médio**. Minas Gerais: SEE, 2005.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et**

Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009, fascículo I.